

第3章 静定结构的受力分析

本章结合几种常用的典型结构型式讨论静定结构的受力分析问题，涉及梁、刚架、桁架、组合结构、拱、悬索等。内容包括支座反力和内力的计算、内力图的绘制，受力性能的分析等。这些内容是在理论力学和材料力学课程的基础上进行论述的，但在讨论问题的深度和广度上有显著的提高，是学习以后各章的基础。



- 梁的内力计算的回顾
- 静定多跨梁
- 静定平面刚架
- 静定平面桁架
- 组合结构

§ 3-1 静定梁的内力计算的回顾

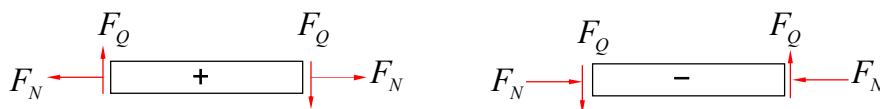
一. 截面的内力分量及其正负号规定

在平面杆件的任一截面上，一般有三个内力分量：

□轴力 F_N ——截面上应力沿杆轴切线方向的合力，以拉力为正。

□剪力 F_Q ——截面上应力沿杆轴法线方向的合力，以绕隔离体微段顺时针转动者为正。

□弯矩 M ——截面上应力对截面形心的合力矩。在结构力学中，不对弯矩正负作规定，可根据计算习惯而定；弯矩图应画在杆件受拉纤维一侧，不注明正负号。



二. 截面法计算杆件内力

截面法是计算指定截面内力的基本方法，即将杆件在指定截面切开，取左边(或右边)部分为隔离体，利用隔离体的静力平衡条件，确定此截面上的三个内力。

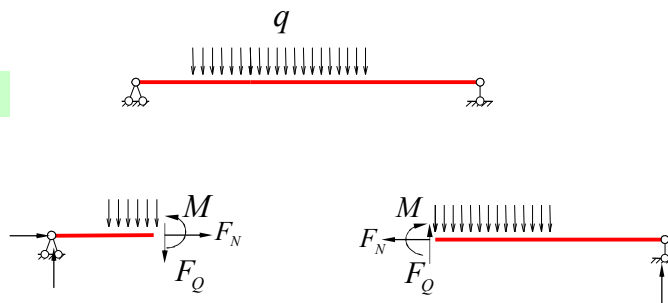
由截面法可以得出截面内力如下：

◆ **轴力 F_N** = 截面一边隔离体的所有外力沿**杆轴切线**方向的投影代数和。

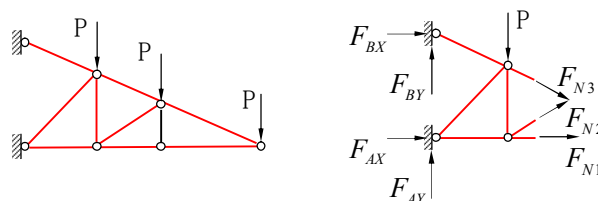
◆ **剪力 F_Q** = 截面一边隔离体的所有外力沿**杆轴法线**方向的投影代数和。

◆ **弯矩 M** = 截面一边隔离体的所有外力对截面形心的力矩代数和。

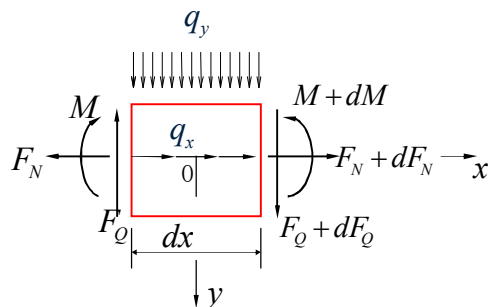
图(1)



图(2)



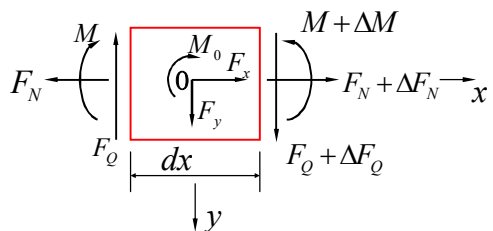
三. 荷载与内力之间的微分关系



由平衡条件可导出微分关系如下：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_N}{dx} &= -q_x \\ \frac{dF_Q}{dx} &= -q_y \\ \frac{dM}{dx} &= F_Q \end{aligned} \right\} (3-1)$$

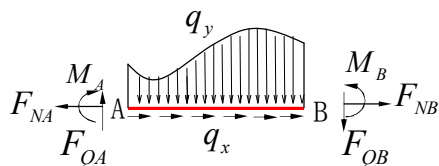
四. 荷载与内力之间的增量关系



由平衡条件可导出增量关系如下：

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_N &= -F_x \\ \Delta F_Q &= -F_y \\ \Delta M &= M_0 \end{aligned} \right\} (3-2)$$

五. 荷载与内力之间的积分关系



由式 (3-1) 积分得：

$$\left. \begin{aligned} F_{NB} &= F_{NA} - \int_{x_A}^{x_B} q_x dx \\ F_{QB} &= F_{QA} - \int_{x_A}^{x_B} q_y dx \\ M_B &= M_A + \int_{x_A}^{x_B} F_Q dx \end{aligned} \right\} (3-3)$$

积分关系的几何意义是：

◆ B端的轴力等于A端的轴力减去该段荷载 q_x 图的面积。

◆ B端的剪力等于A端的剪力减去该段荷载 q_y 图的面积。

◆ B端的弯矩等于A端的弯矩加上此段剪力图的面积。

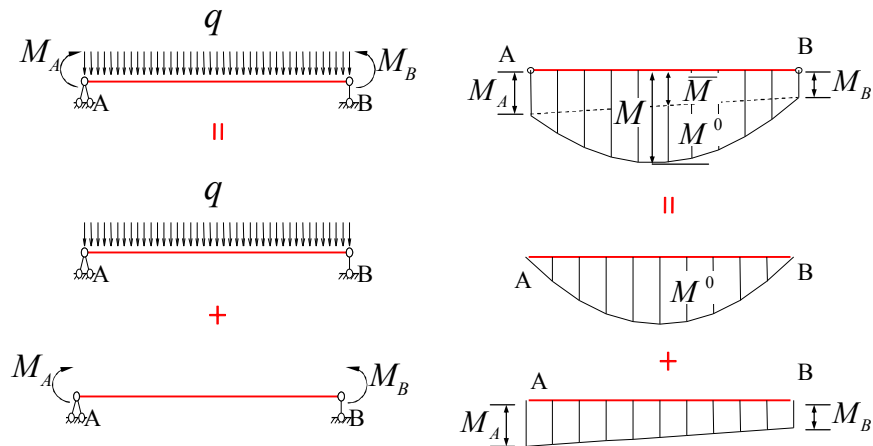
六. 分段叠加法作弯矩图

对结构中的直杆作弯矩图时，可采用分段叠加法，使绘制工作得到简化。

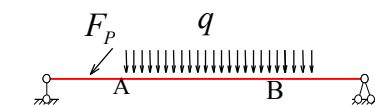
梁在常见荷载作用下弯矩图及剪力图的形状

荷载 \ 内力	无荷载				
F_Q	$F_Q = \text{常量}$	斜直线		$F_Q = \text{常量}$	无变化
M	斜直线	$ql^2/8$	Pab/l		$M = 0$

先讨论简支梁



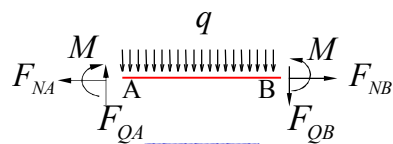
讨论结构中任意直杆段的弯矩图



图(a)

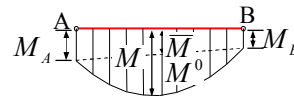
经计算得：

$$\begin{cases} F_{yA}^0 = F_{QA} \\ F_{yB}^0 = F_{QB} \end{cases}$$

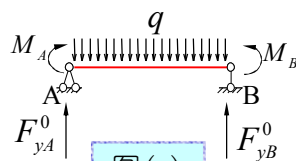


图(b)

所以图 (b) 、
(c) 的M图均为：



图(d)

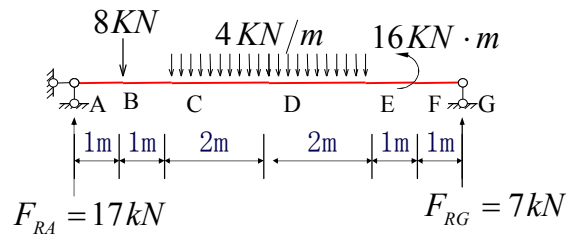


图(c)

内力图的绘制方法：

- ◆ 求控制截面的内力
- ◆ 分段画内力图

【例3.1】 试求图示梁的内力图

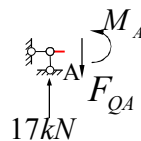


解: Step1: 求支反力, 由梁的整体平衡条件可求出。

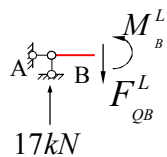
$$\left. \begin{array}{l} \sum M_A = 0 \\ \sum Y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_{RG} \cdot 8 + 16 - 4 \cdot 4 \cdot 4 - 8 \cdot 1 = 0 \\ F_{RA} + F_{RG} - 8 - 4 \cdot 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{RA} = 17 \text{ kN} \\ F_{RG} = 7 \text{ kN} \end{array} \right.$$

Step2: 求控制截面的弯矩和剪力。

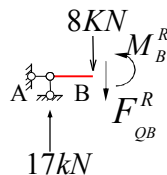
选A、B^L、B^R、C、E、F^L、F^R、G为控制截面, 设弯矩下侧受拉为正。



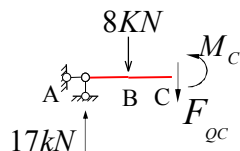
$$\left. \begin{array}{l} \sum M_A = 0 \\ \sum Y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_A = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ F_{QA} = 17 \text{ kN} \end{array} \right.$$



$$\left. \begin{array}{l} \sum M_B = 0 \\ \sum Y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_B^L = 17 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ F_{QB}^L = 17 \text{ kN} \end{array} \right.$$



$$\left. \begin{array}{l} \sum M_B = 0 \\ \sum Y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_B^R = 17 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ F_{QB}^R = 9 \text{ kN} \end{array} \right.$$



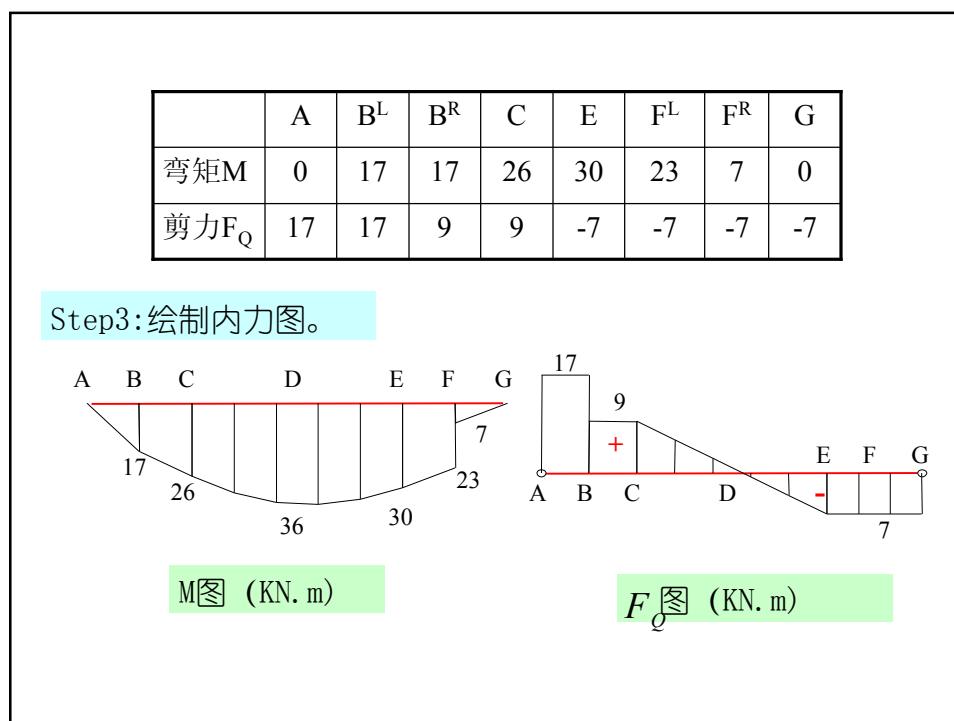
$$\left. \begin{array}{l} \sum M_C = 0 \\ \sum Y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_C = 26 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ F_{QC} = 9 \text{ kN} \end{array} \right.$$

$\sum M_E = 0 \quad M_E = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $\sum Y = 0 \quad F_{QE} = -7 \text{ kN}$

$\sum M_F = 0 \quad M_F^L = 23 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $\sum Y = 0 \quad F_{QF}^L = -7 \text{ kN}$

$\sum M_C = 0 \quad M_C^R = 7 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $\sum Y = 0 \quad F_{QF}^R = -7 \text{ kN}$

$\sum M_G = 0 \quad M_G = 0$
 $\sum Y = 0 \quad F_{QG} = -7 \text{ kN}$

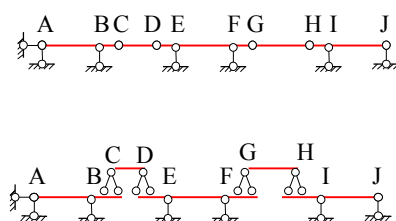


§ 3-2 静定多跨梁

计算静定多跨梁时：

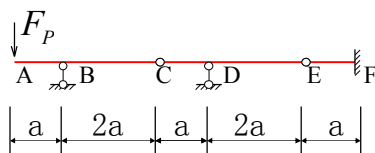
□ 分出基本部分和附属部分（附属部分的力传给基本部分，反之不传）

□ 先计算附属部分的支座反力，再计算基本部分的支座反力；反力求出后，内力图的绘制同单跨梁

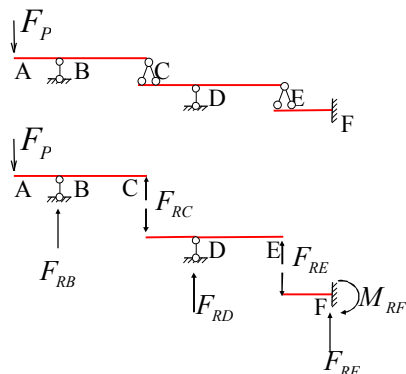


【例3.2】

试求图示梁的内力图



解： Step1: 分层求支反力。



对ABC部分：

$$\sum M_B = 0 \quad F_{RC} = -0.5F_P$$

$$\sum Y = 0 \quad F_{RB} = 1.5F_P$$

对CDE部分：

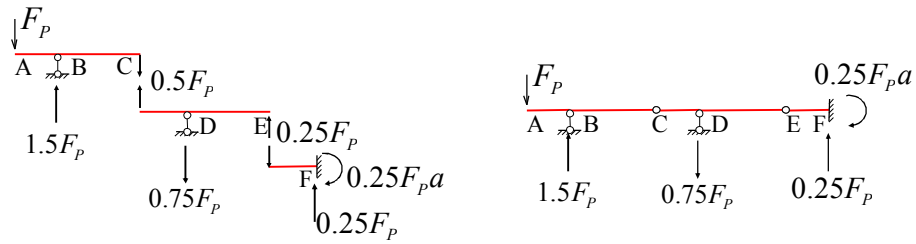
$$\sum M_D = 0 \quad F_{RE} = 0.25F_P$$

$$\sum Y = 0 \quad F_{RD} = -0.75F_P$$

对EF部分：

$$\sum M_E = 0 \quad M_{RF} = 0.25F_P a$$

$$\sum Y = 0 \quad F_{RF} = 0.25F_P$$



Step2: 求控制截面的弯矩和剪力。

选A、B^L、B^R、D^L、D^R、F为控制截面，设弯矩下侧受拉为正

A点: $M_A = 0$

$F_{QA} = -F_P$

B点: $M_B = -F_P a$

$F_{QB}^L = -F_P$

$F_{QB}^R = 0.5F_P$

C点: $M_C = 0$

$F_{QC} = 0.5F_P$

D点: $M_D = 0.5F_P a$

$F_{QD}^L = 0.5F_P$

$F_{QD}^R = -0.25F_P$

E点: $M_E = 0$

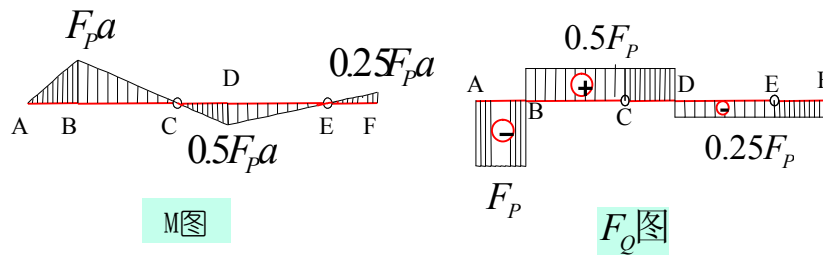
$F_{QE} = -0.25F_P$

F点: $M_F = -0.25F_P a$

$F_{QF} = -0.25F_P$

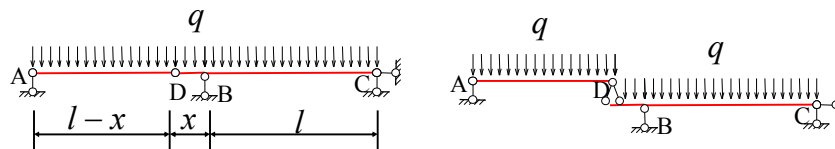
	A	B ^L	B ^R	C	D ^L	D ^R	E	F
弯矩M	0	-1	-1	0	0.5	0.5	0	-0.25
剪力F _Q	-1	-1	0.5	0.5	0.5	-0.25	-0.25	-0.25

Step3: 绘制内力图。

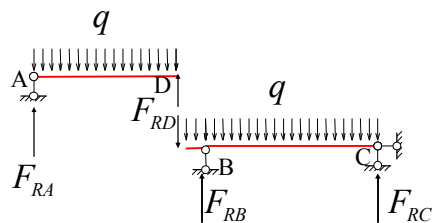


【例3.3】

试求铰D的位置，使负弯矩峰值与正弯矩峰值相等



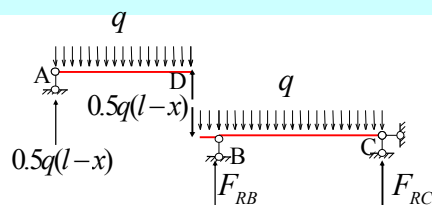
解: Step1: 分层求支反力。



对AD部分:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & \quad F_{RD} = 0.5q(l-x) \\ \sum Y = 0 & \quad F_{RA} = 0.5q(l-x) \end{aligned}$$

Step2: 设弯矩下侧受拉为正，求AD跨的正弯矩及B截面的负弯矩。



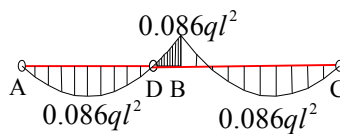
$$M_{\text{跨中}} = \frac{q(l-x)^2}{8}, \quad M_B = \frac{q(l-x)x}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

得:

$$M_{\text{跨中}} = M_B \Rightarrow \frac{q(l-x)^2}{8} = \frac{q(l-x)x}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

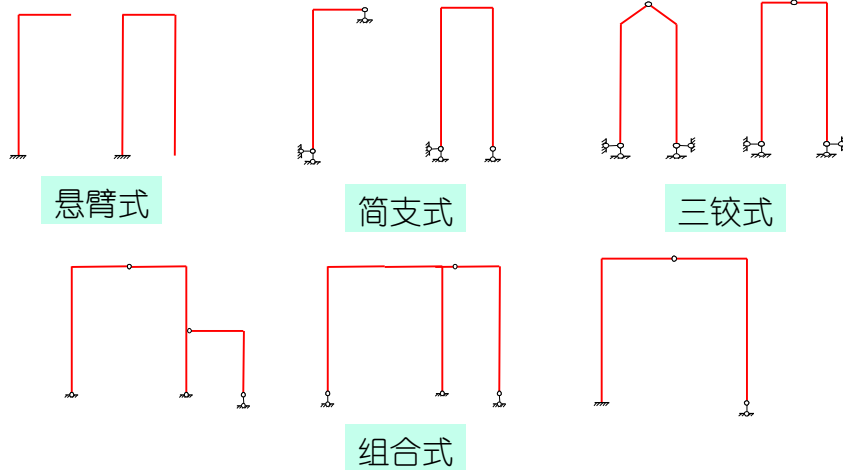
$$x = 0.172l$$

M图



§ 3-3 静定平面刚架

刚架的基本形式有三种：



刚架内力图的作法其规律同梁结构

刚架中各杆的杆端内力

求杆端内力的基本方法仍是截面法。

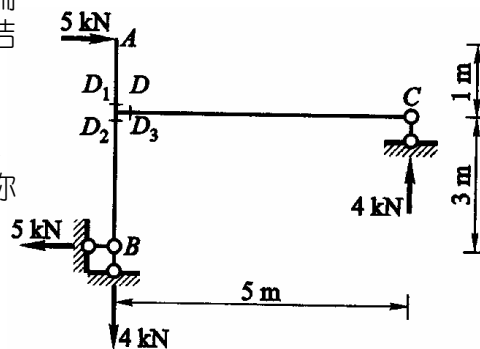
在刚结点处有不同的杆端截面。在图示的刚架中，在结点D处有三个杆件DA、DB、DC相交。因此，在结点D处有三个不同的截面D₁、D₂、D₃。其截面的弯矩、剪力和轴力统称为杆端内力。

杆端内力通常表示为

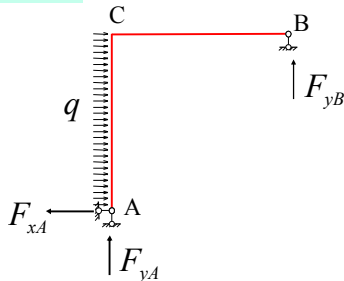
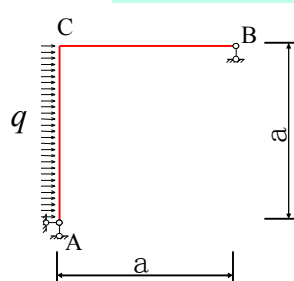
$$M_{DA}, F_{QDA}, F_{NDA}$$

$$M_{DB}, F_{QDB}, F_{NDB}$$

$$M_{DC}, F_{QDC}, F_{NDC}$$



【例3.4】 试求图示刚架的内力图



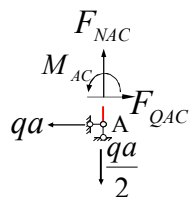
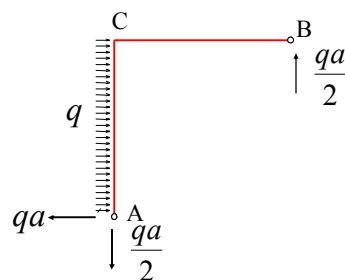
解:

Step1: 求支反力。

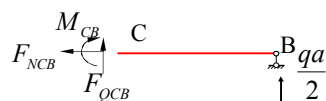
$$\sum F_x = 0, F_{xA} = qa (\leftarrow)$$

$$\sum M_A = 0, F_{yB} = \frac{qa}{2} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0, F_{yA} = -\frac{qa}{2} (\downarrow)$$

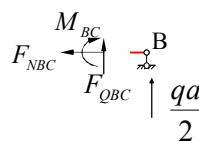


$$\begin{aligned} M_{AC} &= 0 \\ F_{QAC} &= qa \\ F_{NAC} &= \frac{qa}{2} \end{aligned}$$



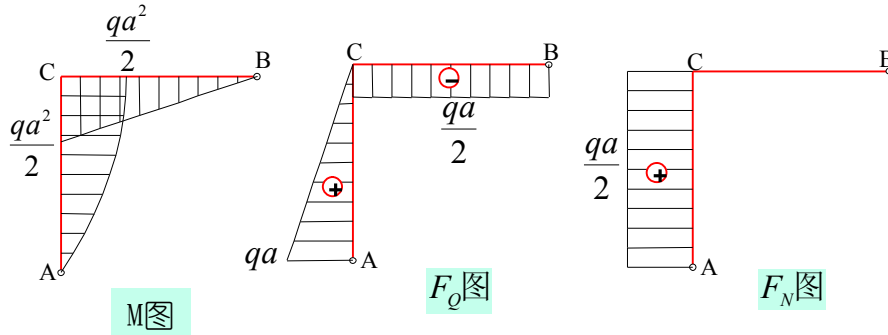
$$\begin{aligned} M_{CA} &= \frac{qa^2}{2} \\ F_{QCA} &= 0 \\ F_{NCA} &= \frac{qa}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CB} &= \frac{qa^2}{2} \\ F_{QCB} &= -\frac{qa}{2} \\ F_{NCB} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M_{BC} &= 0 \\ F_{QBC} &= -\frac{qa}{2} \\ F_{NBC} &= 0 \end{aligned}$$

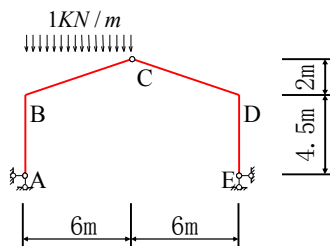
Step3: 绘制内力图。



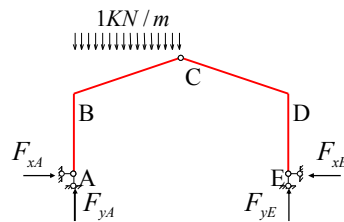
Step4: 内力校核。

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 + 0 = 0 \\ \sum F_y &= qa - qa = 0 \\ \sum M_C &= \frac{qa^2}{2} - \frac{qa^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

【例3.5】 试求图示刚架的内力图

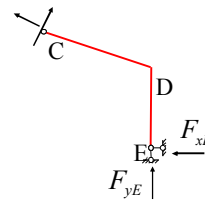


解: Step1: 求支反力。



整个结构:

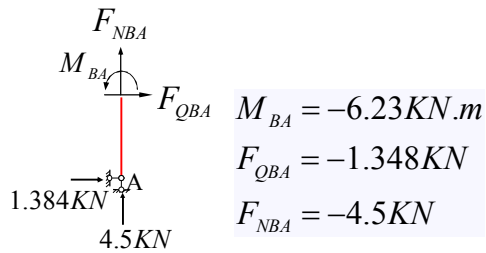
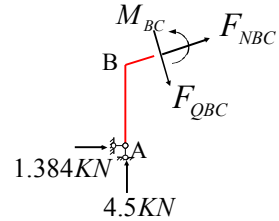
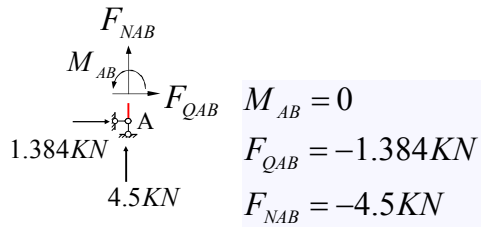
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, F_{xA} - F_{xE} = 0 \\ \sum M_A &= 0, F_{yE} = 1.5 \text{ kN} (\uparrow) \\ \sum F_y &= 0, F_{yA} = 4.5 \text{ kN} (\uparrow) \end{aligned}$$



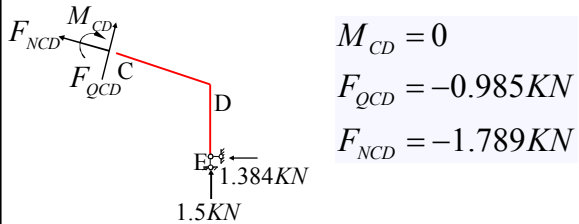
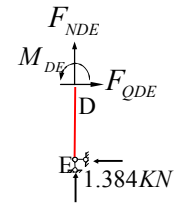
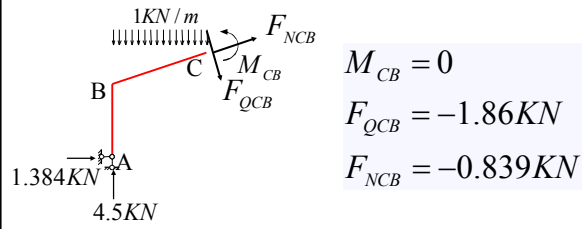
CDE部分:

$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0, F_{xE} = 1.384 \text{ kN} (\leftarrow) \\ \therefore F_{xA} &= 1.384 \text{ kN} (\rightarrow) \end{aligned}$$

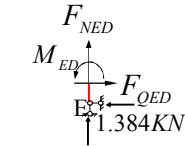
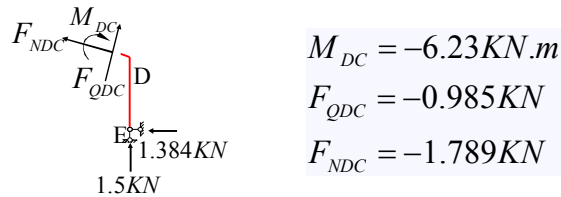
Step2: 求控制截面的内力。设弯矩内侧受拉为正。



$M_{BC} = -6.23 \text{ kN.m}$
 $F_{QBC} = 3.86 \text{ kN}$
 $F_{NBC} = -2.74 \text{ kN}$

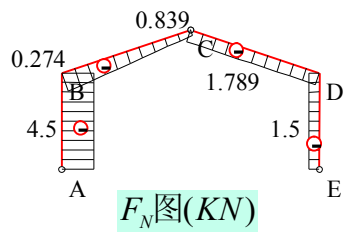
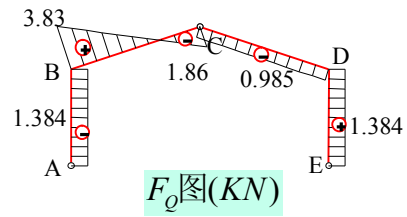
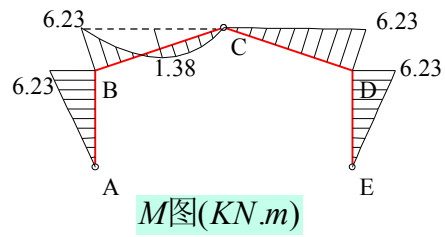


$M_{DE} = -6.23 \text{ kN.m}$
 $F_{QDE} = 1.384 \text{ kN}$
 $F_{NDE} = -1.5 \text{ kN}$

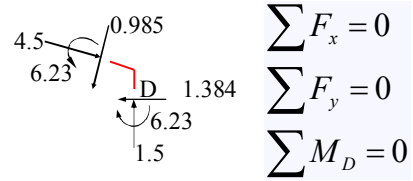


$M_{ED} = 0$
 $F_{QED} = 1.384 \text{ kN}$
 $F_{NED} = -1.5 \text{ kN}$

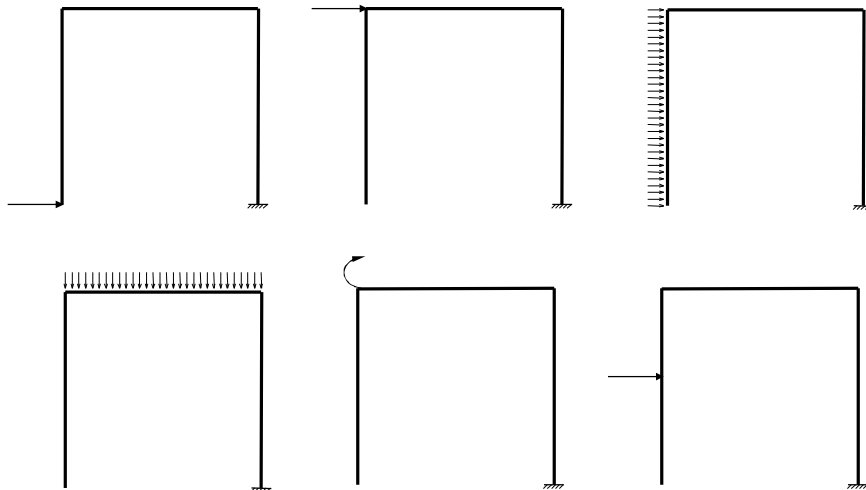
Step3: 绘制内力图。

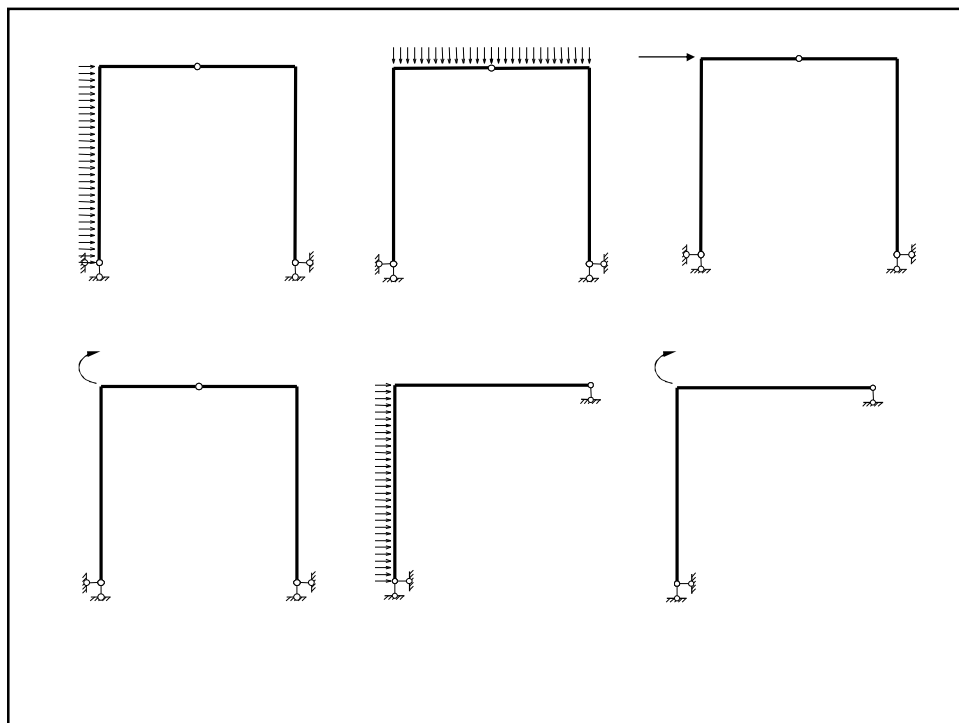
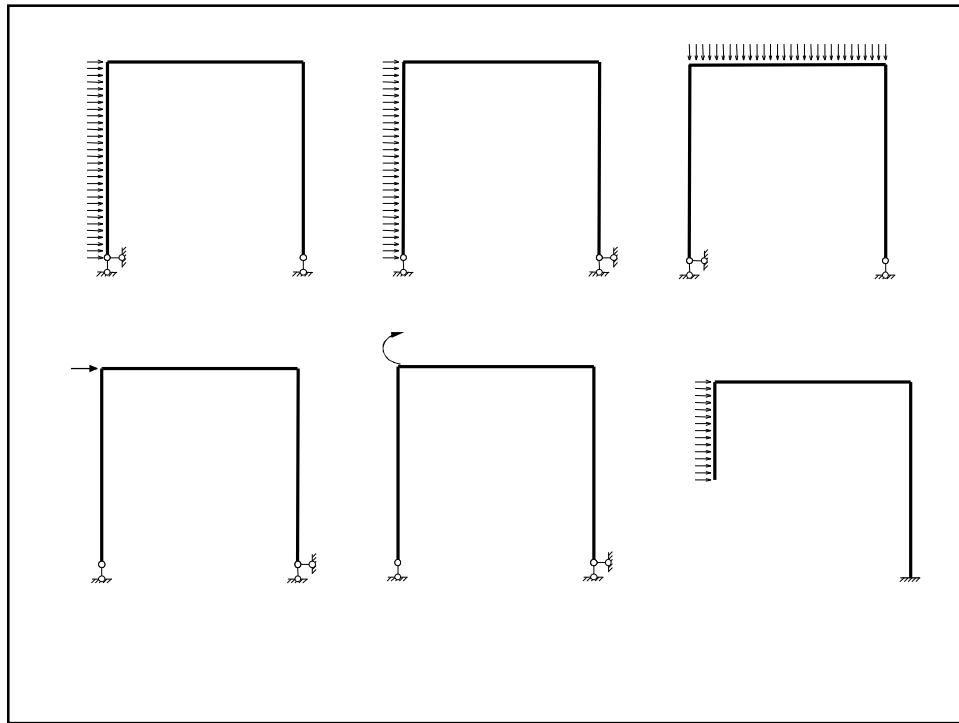


Step4: 内力校核。



快速绘制下列结构的弯矩图



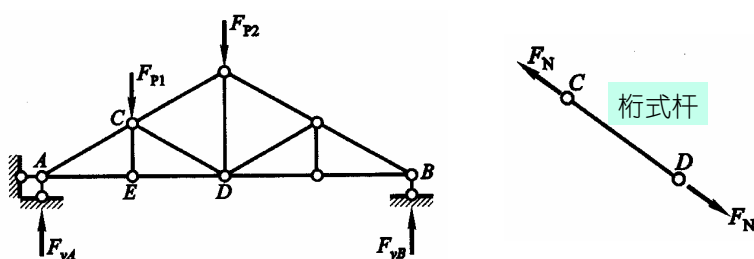


§ 3-5 静定平面桁架

一. 桁架的计算简图

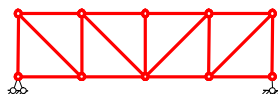
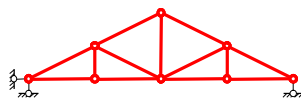
在桁架的内力计算中，采用下列假定：

- ❑ 桁架的结点都是光滑的铰结点；
- ❑ 各杆的轴线都是直线并通过铰的中心；
- ❑ 荷载和支座反力都作用在结点上。

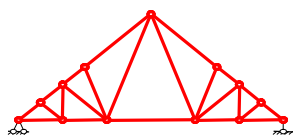


二. 桁架的特点和组成

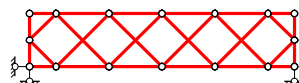
❑ **简单桁架**—由基础或一个基本铰接三角形开始，每次用不在一条直线上的两个链杆连接一个新结点。



❑ **联合桁架**—由几个简单桁架联合组成几何不变的铰接体系。



❑ **复杂桁架**—不属于前两类的桁架。



三. 桁架的计算方法

求桁架的轴力：截取桁架的一部分为隔离体，考虑隔离体的平衡，建立平衡方程，由平衡方程解出杆的轴力。

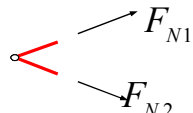
□ 结点法—截取的隔离体为一个结点。

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \text{要求：截取的结点上只有二个未知内力}$$

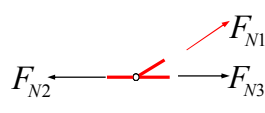
□ 截面法—截取的隔离体包含两个以上的结点。

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0 \quad \text{要求：截面上的未知内力不超过三个，否则，只能求出个别内力。}$$

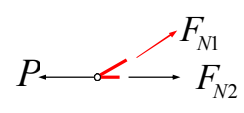
三. 零杆的判别



$$F_{N1} = F_{N2} = 0$$

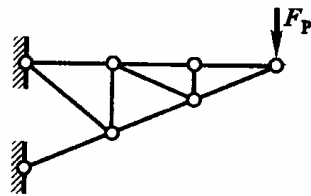


$$F_{N1} = 0, \quad F_{N2} = F_{N3}$$

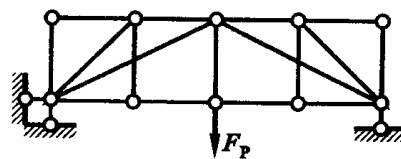


$$F_{N1} = 0, \quad F_{N2} = P$$

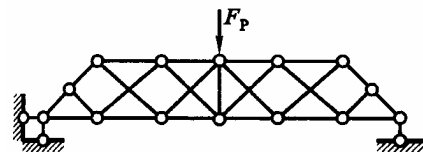
四. 指出下列桁架中的零杆



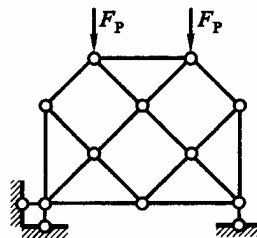
简单桁架，有4根零杆



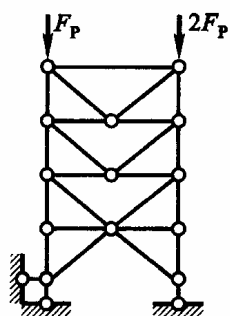
联合桁架，有10根零杆



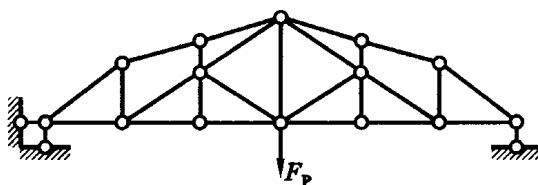
简单桁架，7根零杆



复杂桁架，利用对称性，8根零杆



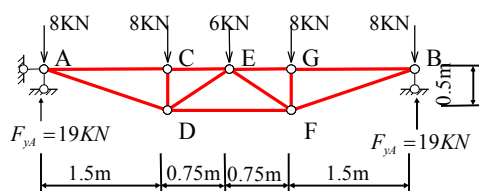
简单桁架，15根零杆



简单桁架，6根零杆

结点法

【例3.7】试求桁架的内力图



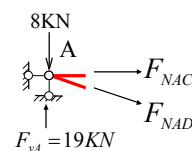
解: Step1: 求支反力。

$$\sum F_x = 0, F_{xA} = 0$$

$$\sum M_A = 0, F_{yB} = 19kN (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0, F_{yA} = 19kN (\uparrow)$$

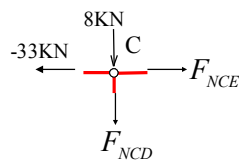
Step2: 结点法
求各杆内力



$$\sum F_x = 0, F_{NAC} + F_{NADx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{NADy} + 8 - 19 = 0$$

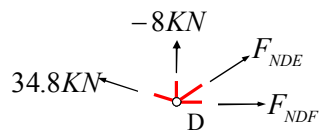
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{NAC} = -33kN \\ F_{NAD} = 34.8kN \end{cases}$$



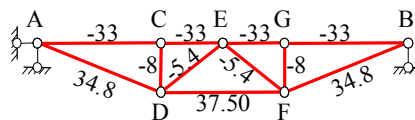
利用结构的对称性得所有杆的内力

$$\sum F_x = 0, F_{NCE} = -33 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_{NCD} = -8 \text{ kN}$$



Step3: 绘制内力图。



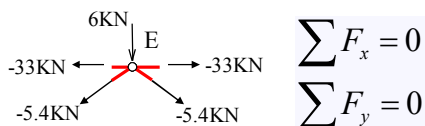
F_N 图 (kN)

$$\sum F_x = 0, F_{NDEx} + F_{NDF} - 33 = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{NDEy} - 8 + 11 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{NDE} = -5.4 \text{ kN} \\ F_{NDF} = 37.5 \text{ kN} \end{cases}$$

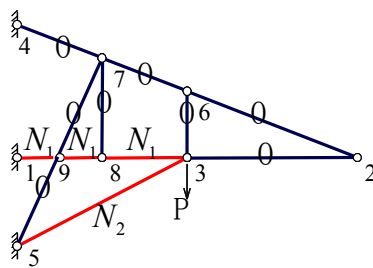
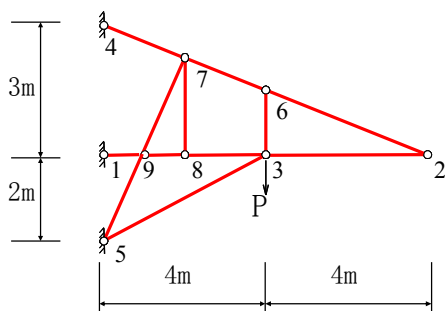
Step4: 内力校核。



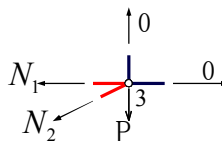
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

【例3.8】试求桁架的内力图



Step2: 求各杆内力



$$\sum F_x = 0, N_1 = 2P$$

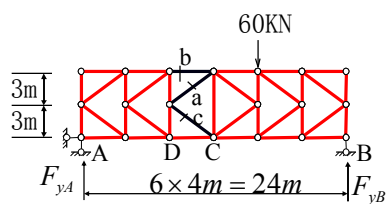
$$\sum F_y = 0, N_2 = -\sqrt{5}P$$

解:

Step1: “零杆判别”。

截面法

【例3.9】 试求a、b、c杆的内力



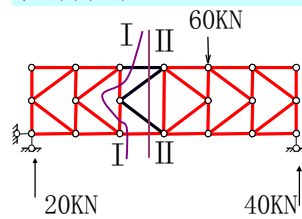
解:

Step1: 求支反力。

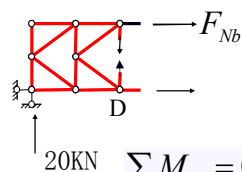
$$\sum M_A = 0, F_{yB} = 40 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_{yA} = 20 \text{ kN}$$

Step2: 截面法求指定杆内力

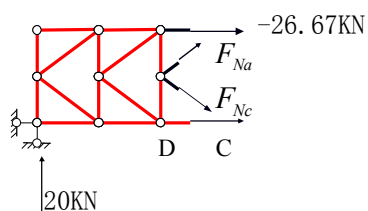


I—I 截面



$$\sum M_D = 0 \Rightarrow F_{Nb} = -26.67 \text{ kN}$$

II—II 截面



$$\sum M_C = 0 \quad -20 \times 12 - (-26.67) \times 6 - F_{Na} \times 3 - F_{Nay} \times 4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ncy} - F_{Nay} = 20$$

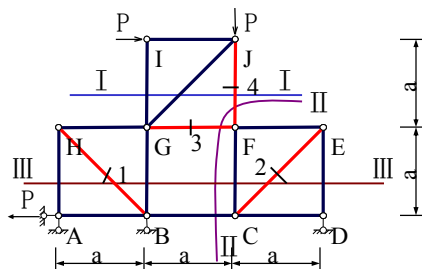
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{Na} = -16.67 \text{ kN} \\ F_{Nc} = 16.67 \text{ kN} \end{cases}$$

综上所述, 得:

$$\begin{aligned} F_{Na} &= -16.67 \text{ kN} \\ F_{Nb} &= -26.67 \text{ kN} \\ F_{Nc} &= 16.67 \text{ kN} \end{aligned}$$

【例3.10】 试求1、2、3、4杆的内力

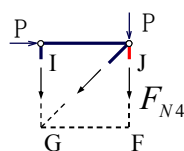
Step2: 截面法求指定杆内力



解:

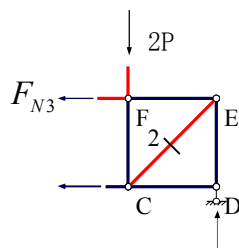
Step1: 求支反力。

I—I 截面



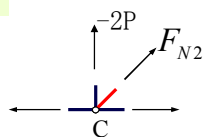
$$\begin{aligned}\sum M_G = 0 \Rightarrow \\ F_{N4} = -2P\end{aligned}$$

II—II 截面



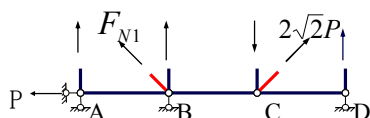
$$\begin{aligned}\sum M_D = 0 \Rightarrow \\ F_{N3} = -2P\end{aligned}$$

结点C



$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 \Rightarrow \\ F_{N2} = 2\sqrt{2}P\end{aligned}$$

III—III 截面

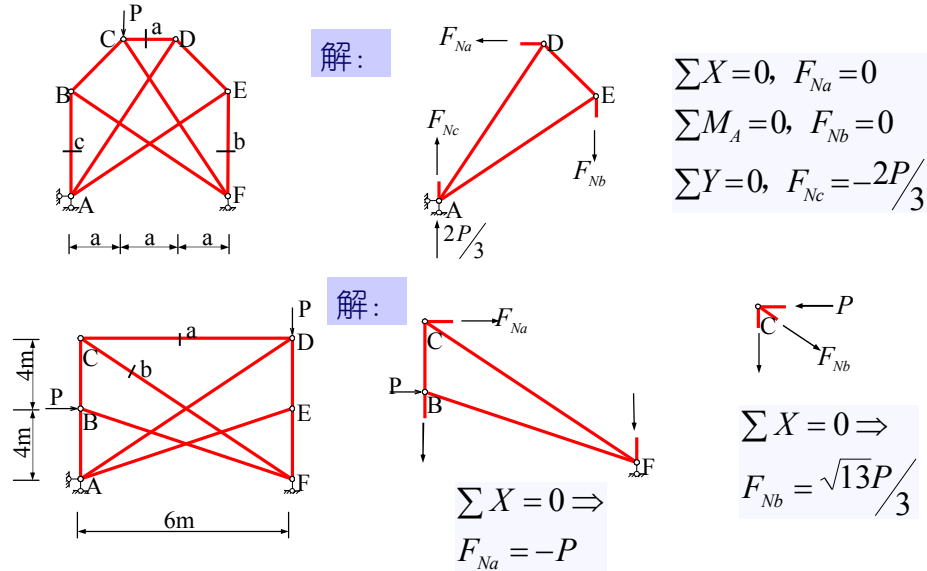


$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 \Rightarrow \\ F_{N1} = \sqrt{2}P\end{aligned}$$

综上所述, 得:

$$\begin{aligned}F_{N1} = \sqrt{2}P, \quad F_{N2} = 2\sqrt{2}P \\ F_{N3} = -2P, \quad F_{N4} = -2P\end{aligned}$$

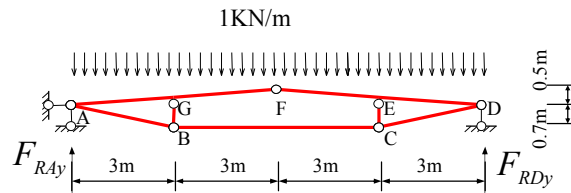
【例3.11】 指出下列各桁架指定杆内力的求解方法



§ 3-7 组合结构

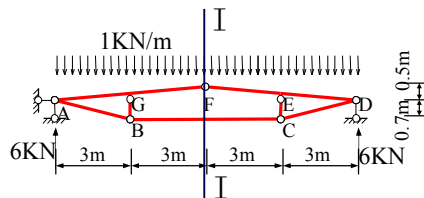
组合结构—由桁式杆和梁式杆组成的结构。计算时，一般先求出桁式杆的内力，然后根据荷载和所求得的轴力作梁式杆的内力图。

【例3.12】 求出下列各桁式杆内力并作内力图

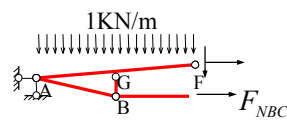


解: Step1:求支反力。

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & \quad F_{RDy} = 6KN \\ \sum Y = 0 & \quad F_{RAy} = 6KN \end{aligned}$$

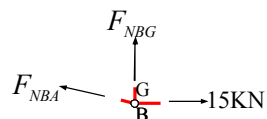


Step2: 求内力



$$\sum M_F = 0 \Rightarrow$$

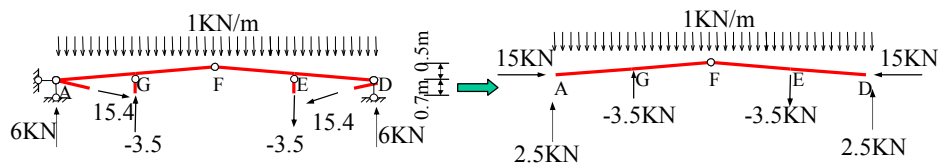
$$F_{NBC} = 15 \text{ kN}$$



$$\sum F_x = 0 \quad F_{NBA} = 15.4$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{NBG} = -3.5$$

下面求梁式杆各控制截面的内力，设弯矩上侧受拉为正。



$$F_{NAG} = -15.13 \text{ kN}$$

$$F_{QAG} = 1.24 \text{ kN}$$

$$M_{AG} = 0$$

$$F_{NGA} = -14.96 \text{ kN}$$

$$F_{QGA} = -1.75 \text{ kN}$$

$$M_{GA} = 0.75 \text{ kN.m}$$

$$F_{NGF} = -15.17 \text{ kN}$$

$$F_{QGF} = 1.74 \text{ kN}$$

$$M_{GF} = 0.75 \text{ kN.m}$$

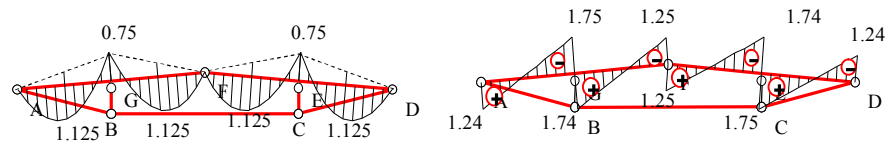
$$F_{NFG} = -14.92 \text{ kN}$$

$$F_{QFG} = -1.25 \text{ kN}$$

$$M_{FG} = 0$$

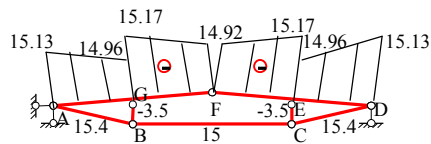
Step3: 作内力图

	AG	GA	GF	FG
弯矩M	0	0.75	0.75	0
剪力 F_Q	1.24	-1.75	1.74	-1.25
轴力 F_N	-15.13	-14.96	-15.17	-14.92



M 图 (KN)

F_Q 图(KN)



F_N 图(KN)