

第 5 章 影响线

在一般工程结构中，除了受固定荷载外，还会受到移动荷载作用。显然，在移动荷载作用下，结构的内力或支座反力（称为量值）不再是常量。

在进行结构设计时，需要计算出结构在固定荷载和移动荷载共同作用下内力的最大值，为此，需要进一步研究在移动荷载共同作用下结构某个内力或支座反力等量值的变化规律，以便找出它们的最大值。

本章着重讨论结构在移动荷载作用下的内力或支座反力的计算问题。影响线是研究移动荷载作用的基本工具。



- 移动荷载和影响线的概念
- 静力法作简支梁影响线
- 结点荷载作用下梁的影响线
- 静力法作桁架的影响线
- 机动法作影响线

§ 5-1 移动荷载和影响线的概念

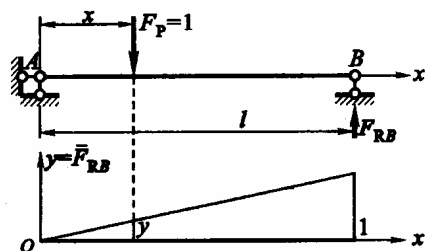
一. 移动荷载

移动荷载的类型很多，没有必要逐个地加以讨论，而只需抽出其中的共性进行典型分析。

典型的移动荷载就是单位移动荷载 $F_p = 1$ ，它是从各种移动荷载中抽出来的最简单、最基本的元素。只要把单位移动荷载作用下的内力变化规律分析清楚，那么，根据叠加原理，就可以顺利地解决各种移动荷载作用下的内力计算问题以及最不利荷载位置的确定问题。

二. 支座反力、内力影响线

简支梁AB如图所示，当单个竖向荷载 $F_P = 1$ 在梁上移动时，现讨论B处支座反力的变化规律。



F_{RB} 影响线

$$\text{令 } \bar{F}_{RB} = \frac{x}{l} \quad (0 \leq x \leq l)$$

(影响系数)

$$\sum M_A = 0 \quad F_{RB}l - F_P x = 0$$

$$\rightarrow F_{RB} = \frac{x}{l} F_P \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$\bar{F}_{RB} = \frac{x}{l} \text{ 表示影响系数}$$

\bar{F}_{RB} 与荷载位置参数 x 之间的函数关系，这个函数的图形便称为 \bar{F}_{RB} 的影响线。

支座反力、内力影响线 — 表示单位移动荷载作用下支座反力、内力变化规律的图形。

静定结构的支座反力或内力影响线**分析方法**：静力法和机动法。

关于影响线的几点说明：

□影响线上任一点的横坐标 x 表示单位荷载的位置，纵坐标（或称竖标）表示当单位荷载作用于此位置时所研究截面某一反力或内力的数值。

□在绘制影响线时，单位荷载是不带量纲的。在利用影响线研究实际荷载的影响时就比较方便，只需将某反力或内力影响线的竖标乘以实际荷载的单位就行了。

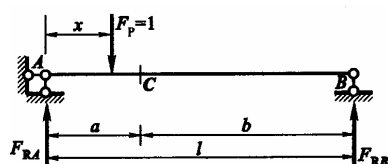
□符号规定。支座反力以向上为正，向下为负；弯矩、剪力、轴力的符号与前述规定一致。影响量的正值，画在横轴（基线）的上侧，负值则画在横轴的下侧，并注明正负号。

§ 5-2 静力法作简支梁影响线

静力法—以荷载的作用位置 x 为变量,通过平衡方程,从而确定所求内力(或支座反力)的影响函数,并作出影响线。

一. 支座反力影响线

当荷载 $F_P = 1$ 在梁上任意位置 $x(0 \leq x \leq l)$ 时,利用平衡方程可求出支座反力的影响系数 \bar{F}_{RA}

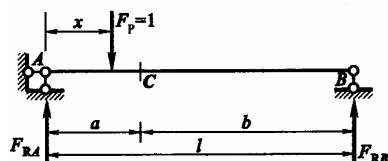


$$\bar{F}_{RA} = \frac{l-x}{l} \quad (0 \leq x \leq l)$$



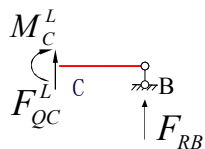
二. 剪力影响线

当 $F_P = 1$ 作用在CB段时($a \leq x \leq l$)



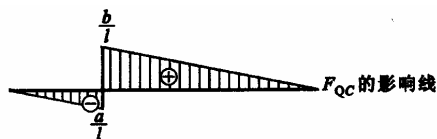
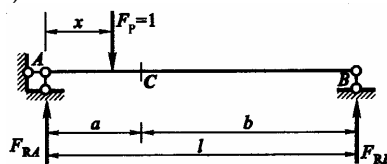
$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad F_{QC}^R - F_{RA} &= 0 \\ F_{QC}^R = F_{RA} &= \frac{l-x}{l} F_P \end{aligned}$$

当 $F_P = 1$ 作用在AC段时($0 \leq x \leq a$)

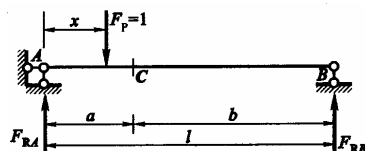


$$\sum F_y = 0 \quad F_{QC}^L + F_{RB} = 0$$

$$F_{QC}^L = -F_{RB} = -\frac{x}{l} F_P$$



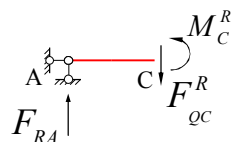
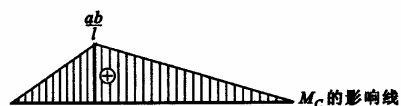
三. 弯矩影响线



当 $F_P = 1$ 作用在AC段时 ($0 \leq x \leq a$)

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 \\ -M_C^L + F_{RB}b = 0 \\ M_C^L = F_{RB}b = \frac{bx}{l} F_P \end{aligned}$$

当 $F_P = 1$ 作用在CB段时 ($a \leq x \leq l$)



$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 \quad M_C^R - F_{RA}a = 0 \\ M_C^R = F_{RA}a = \frac{a(l-x)}{l} F_P \end{aligned}$$

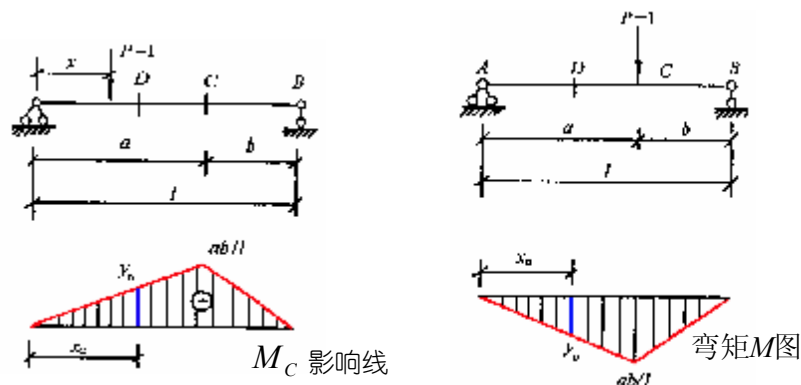
四. 影响线与内力图的比较

影响线是影响系数与荷载位置间的关系曲线，它与内力分布图是有区别的。

影响线是描述单位集中荷载在不同位置作用时对结构中某固定处某量的影响。

内力图是描述在固定荷载作用下，内力沿结构各个截面的分布。

可以通过简支梁内力图与影响线的比较讨论加深对影响线概念的理解。

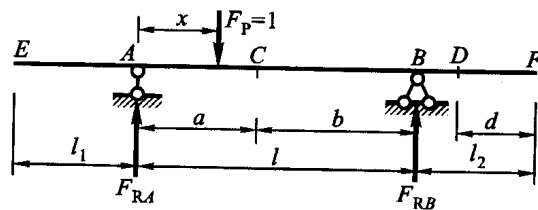


M_C 影响线表示单位荷载 $P=1$ 沿结构移动时，截面 C 的弯矩值的变化情况。影响线上所有竖标都是表示截面 C 的弯矩值。例如：截面 D 的竖标 y_D 表示 $P=1$ 作用在 D 点时截面 C 的弯矩值。

弯矩图 M 则表示在固定荷载 $P=1$ 作用下，梁上各个截面弯矩的分布情况。弯矩图上的竖标表示所在截面的弯矩值，不同截面的竖标表示不同截面的弯矩值。例如：截面 D 的竖标 y_D 表示截面 D 的弯矩值。

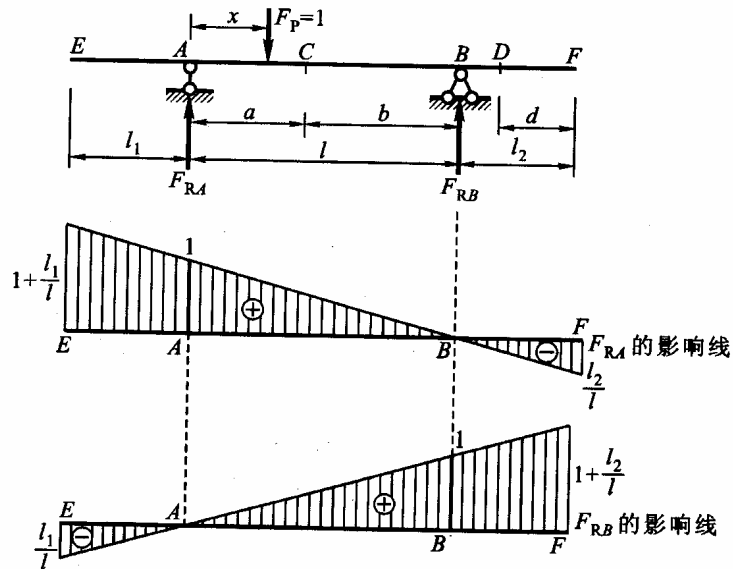
五. 外伸梁的影响线

【例5.1】作图示外伸梁 F_{RA} 、 F_{RB} 、 F_{QC} 、 F_{QD} 的影响线



解：(1) 作 F_{RA} 、 F_{RB} 的影响线

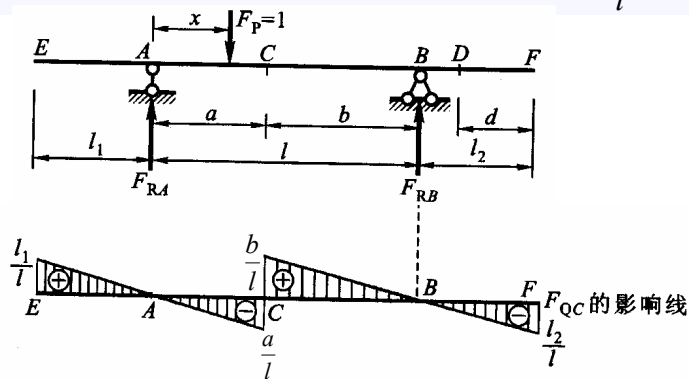
$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{RA} &= \frac{l-x}{l} \\ \bar{F}_{RB} &= \frac{x}{l} \end{aligned} \right\} (-l_1 \leq x \leq l+l_2)$$



由图可知：只要将相应简支梁的反力影响线向左、右两边延长，即可得到外伸梁的反力影响线。

(2) 作剪力 F_{QC} 的影响线

当 $F_P=1$ 在C点以左时 (EC段)，可得 $F_{QC} = -F_{RB} = -\frac{x}{l} F_P$
 当 $F_P=1$ 在C点以右时 (CF段)，可得 $F_{QC} = F_{RA} = \frac{l-x}{l} F_P$

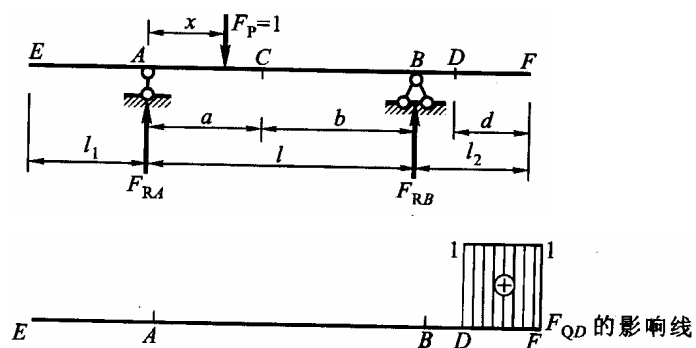


由图可知：只要将相应简支梁的剪力、弯矩影响线向左、右两边延长，即可得到外伸梁的剪力、弯矩影响线。

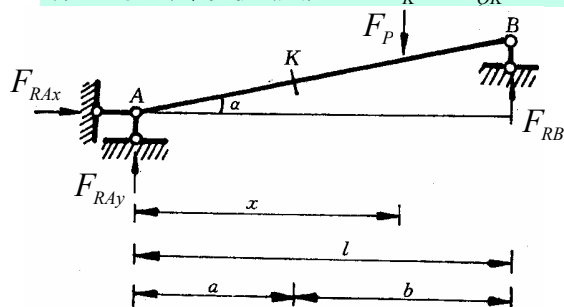
(3) 作剪力 F_{QD} 的影响线

当 $F_P = 1$ 在D点以左时，取D的右边为隔离体，得 $\bar{F}_{QD} = 0$

当 $F_P = 1$ 在D点以右时，取D的左边为隔离体，得 $\bar{F}_{QD} = +1$



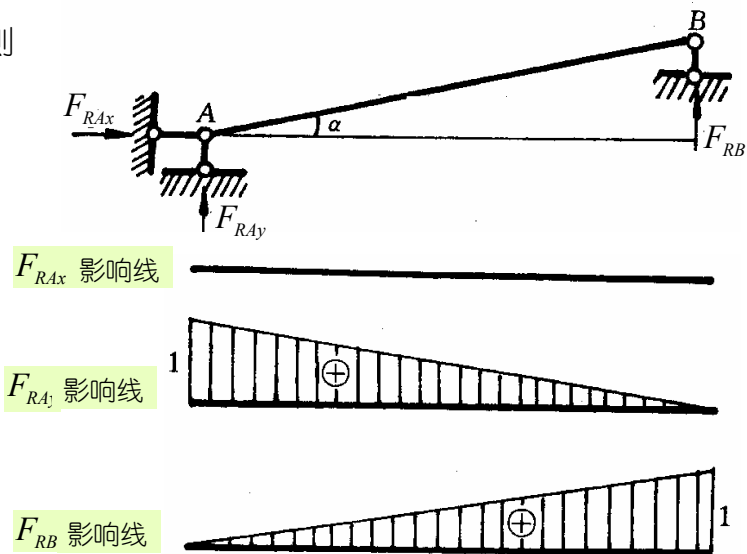
【例5.2】作图示斜梁支座反力及 M_K 、 F_{OK} 、 F_{NK} 影响线



解： (1) 支座反力影响线

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad & F_{RAx} = 0 \\ \sum M_B = 0 \quad & F_{RAy} = \frac{l-x}{l} F_P \\ \sum M_A = 0 \quad & F_{RB} = \frac{x}{l} F_P \end{aligned}$$

则



(2) M_K 影响线

当 $F_P = 1$ 在截面K左方时 ($0 \leq x \leq a$), 取K右边为隔离体

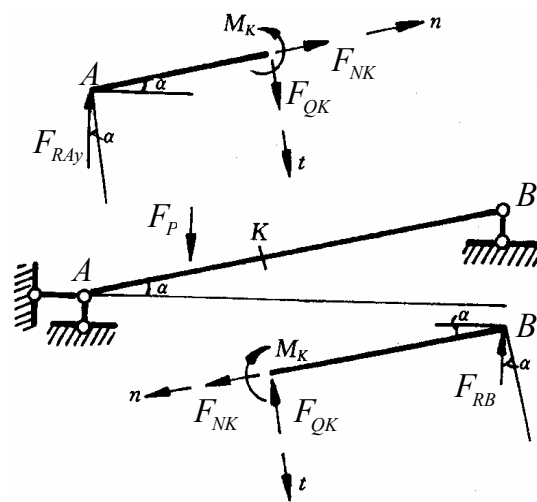
$$\sum M_B = 0$$

$$M_K = F_{RB} b = \frac{x}{l} b$$

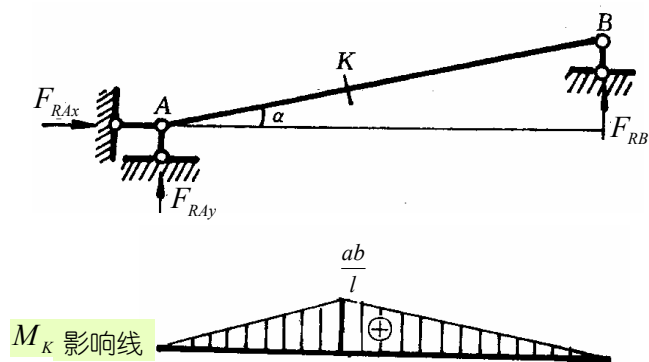
当 $F_P = 1$ 在截面K右方时 ($a \leq x \leq l$), 取K左边为隔离体

$$\sum M_A = 0$$

$$M_K = F_{RAy} a = \frac{l-x}{l} a$$



则 M_K 影响线为



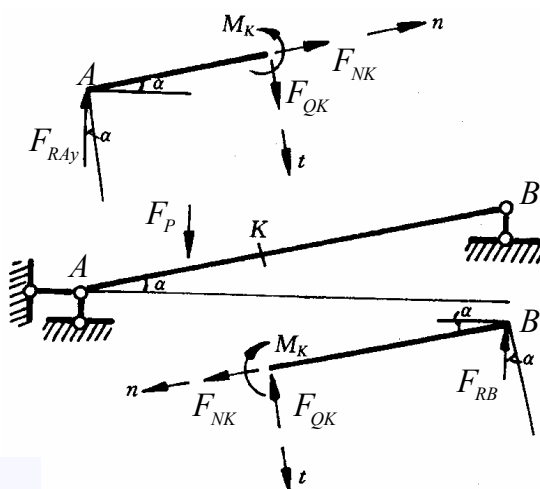
(3) F_{QK} 影响线

当 $F_P = 1$ 在截面K左方时 ($0 \leq x \leq a$), 取K右边为隔离体

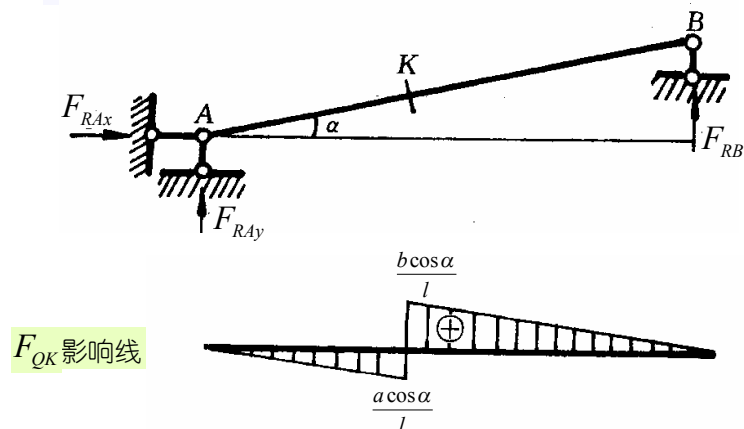
$$\begin{aligned}\sum F_t &= 0 \\ F_{QK} &= -F_{RB} \cos \alpha \\ &= -\frac{x}{l} \cos \alpha\end{aligned}$$

当 $F_P = 1$ 在截面K右方时 ($a \leq x \leq l$), 取K左边为隔离体

$$\begin{aligned}\sum F_t &= 0 \\ F_{QK} &= F_{RA} \cos \alpha = \frac{l-x}{l} \cos \alpha\end{aligned}$$



则 F_{OK} 影响线为



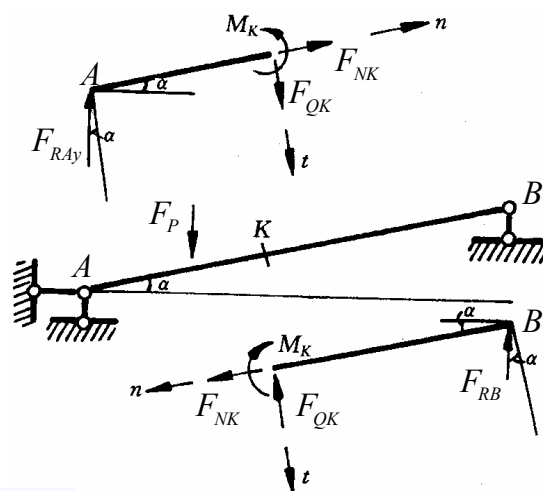
(4) F_{NK} 影响线

当 $F_P = 1$ 在截面K左方时 ($0 \leq x \leq a$), 取K右边为隔离体

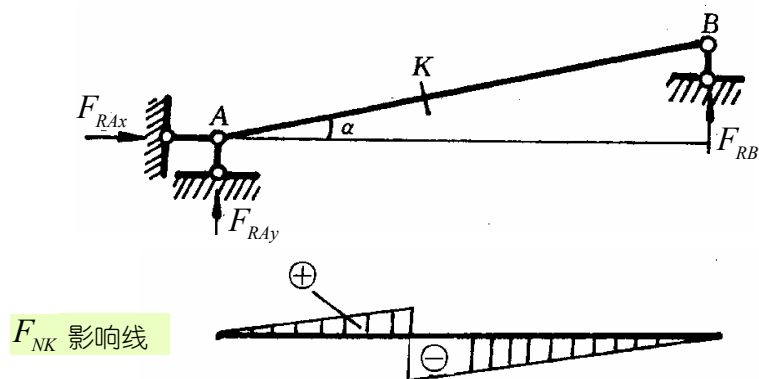
$$\begin{aligned} \sum F_n &= 0 \\ F_{NK} &= F_{RB} \sin \alpha \\ &= \frac{x}{l} \sin \alpha \end{aligned}$$

当 $F_P = 1$ 在截面K右方时 ($a \leq x \leq l$), 取K左边为隔离体

$$\begin{aligned} \sum F_n &= 0 \\ F_{NK} &= -F_{RA} \sin \alpha = -\frac{l-x}{l} \sin \alpha \end{aligned}$$

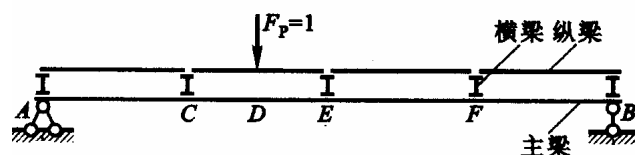


则 F_{NK} 影响线为



§ 5-3 结点荷载作用下梁的影响线

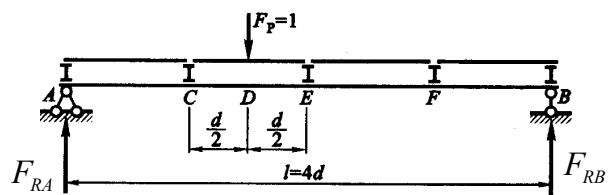
如图所示结构，荷载直接施加于纵梁，通过纵梁下面的横梁传到主梁。不论纵梁承受何种荷载，主梁只在A、C、E、F、B等有横梁处(即结点处)承受集中力，因此主梁承受的是**结点荷载**，又称**间接荷载**。



主梁影响线作图规律：

- 在结点荷载作用下，结构任何影响线在相邻两结点之间为一直线。
- 先作直接荷载作用下的影响线，用直线连接相邻两结点的竖距，就得到结点荷载作用下的影响线。

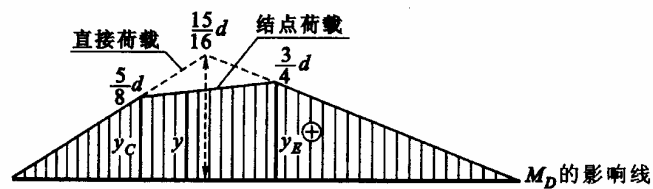
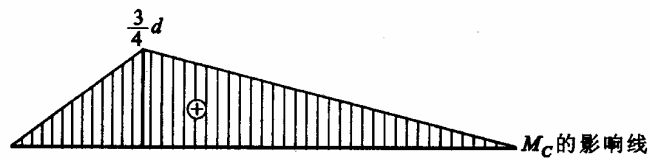
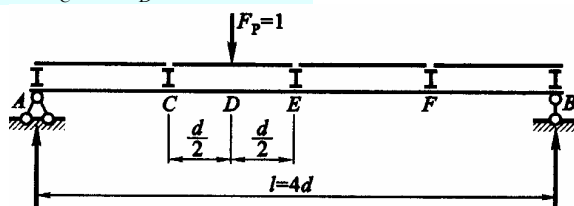
【例5.3】作图示结构 F_{RA} 、 F_{RB} 、 M_C 、 M_D 、 F_{QCE} 的影响线



解：(1) 作 F_{RA} 、 F_{RB} 的影响线

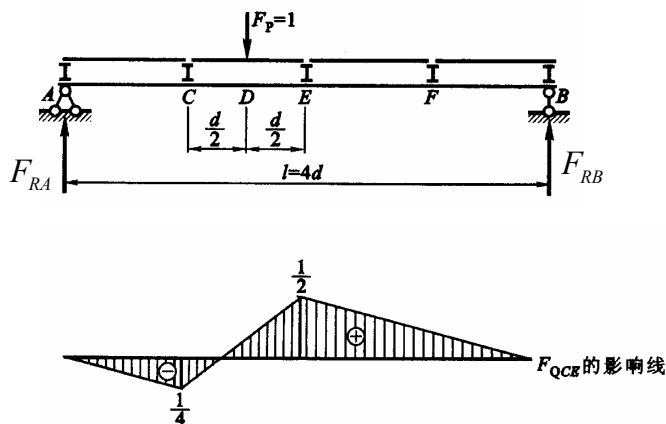


(2) 作 M_C 、 M_D 的影响线



(3) 作 F_{QCE} 的影响线

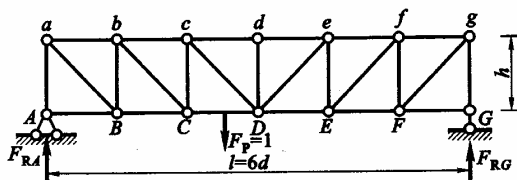
在结点荷载作用下，主梁在C、E两点之间没有外力，因此CE一段各截面的剪力都相等，通常称为**节间剪力**，以 F_{QCE} 表示。



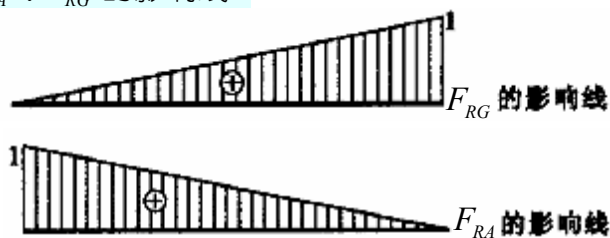
§ 5-4 静力法作桁架的影响线

桁架中任一杆的轴力影响线在相邻结点之间为一直线。

【例5.4】单位荷载沿平行弦桁架下弦AG移动，作影响线。



解：(1) 作 F_{RA} 、 F_{RG} 的影响线

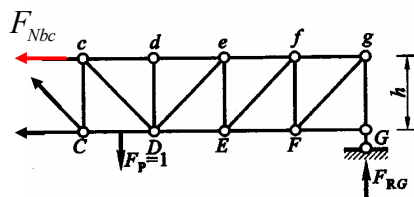


(2) 上弦杆bc轴力 F_{Nbc} 的影响线

单位荷载在C点以左时 ($0 \leq x \leq d$)
取截面I—I以右部分为隔离体

$$\sum M_C = 0 \quad F_{RG} 4d + F_{Nbc} h = 0$$

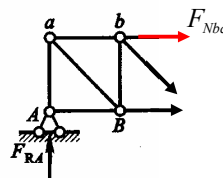
$$F_{Nbc} = -\frac{4d}{h} F_{RG} = -\frac{2x}{3h} F_P$$



单位荷载在C点以右时 ($2d \leq x \leq 6d$)
取截面I—I以左部分为隔离体

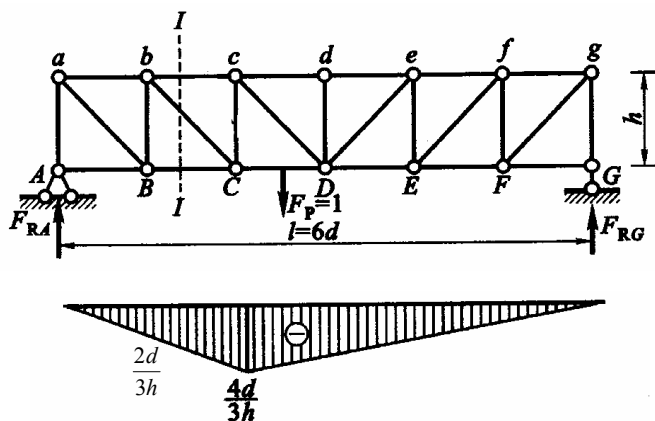
$$\sum M_C = 0 \quad F_{RA} 2d + F_{Nbc} h = 0$$

$$F_{Nbc} = -\frac{2d}{h} F_{RA} = -\frac{6d-x}{3h} F_P$$



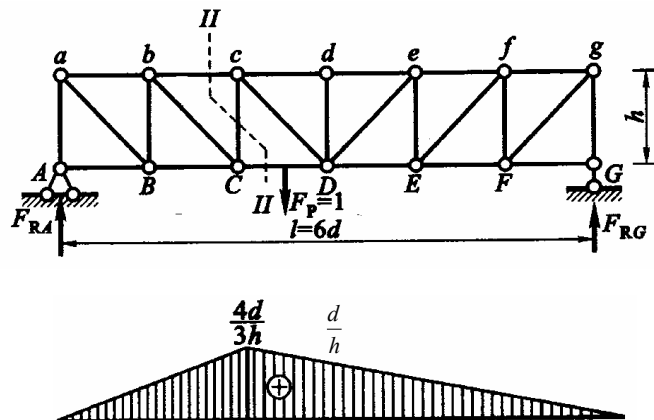
单位荷载在B、C之间，影响线为直线。

则上弦杆轴力 F_{Nbc} 的影响线为



(3) 下弦杆CD轴力 F_{NCD} 的影响线

同理，作截面II-II，利用力矩方程 $\sum M_C = 0$ 即可

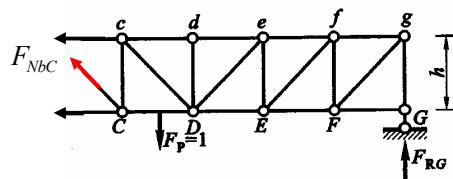


(4) 斜杆bC轴力的竖向分力 F_{ybC} 的影响线

单位荷载在B点以左时 ($0 \leq x \leq d$)
取截面I—I以右部分为隔离体

$$\sum F_y = 0$$

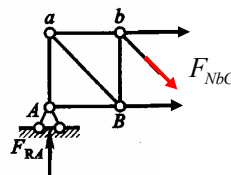
$$F_{ybC} = -F_{RG} = -\frac{x}{6d} F_P$$



单位荷载在C点以右时 ($2d \leq x \leq 6d$)
取截面I—I以左部分为隔离体

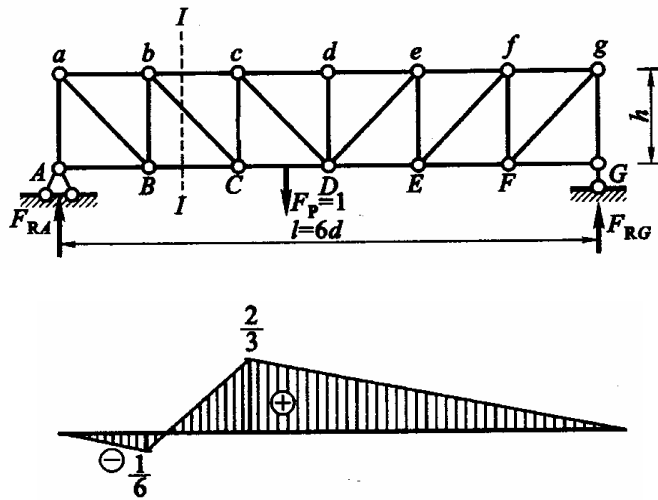
$$\sum F_y = 0$$

$$F_{ybC} = F_{RA} = \frac{6d - x}{6d} F_P$$



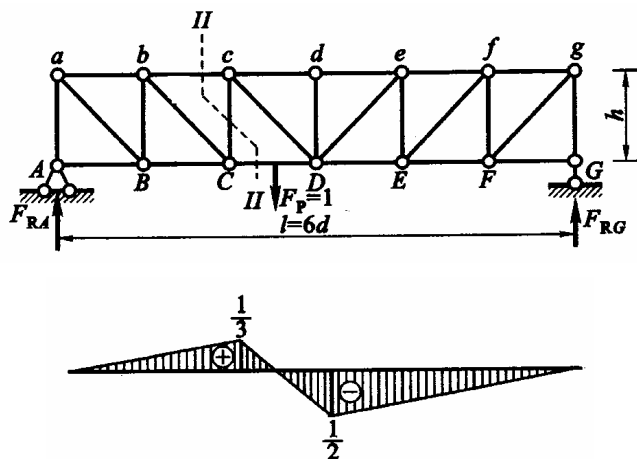
单位荷载在B、C之间，影响线为直线。

则斜杆bC轴力的竖向分力 F_{ybC} 的影响线为



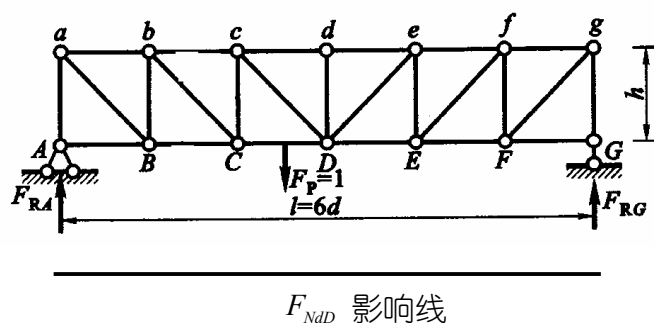
(5) 竖杆cC轴力 F_{NcC} 的影响线

同理，作截面II-II，利用投影方程 $\sum F_y = 0$ 即可



(6) 竖杆dD轴力 F_{NdD} 的影响线

不管单位荷载移动到什么位置，dD杆永远是零杆。



§ 5-5 机动法作影响线

机动法是以虚功原理为基础，把作内力或支座反力影响线的静力问题转化为作位移图的几何问题的方法。

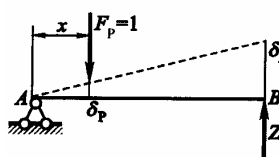
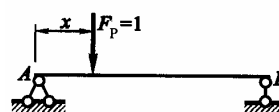
将简支梁的支座B反力 $Z = F_{RB}$ 相应的约束B撤去，代以未知量Z，使体系具有一个自由度。然后给体系施加虚位移 δ_Z 和 δ_P ，使梁绕A点作微小转动，则由虚功方程可得

$$Z\delta_Z + F_P\delta_P = 0 \implies \bar{Z} = -\frac{\delta_P}{\delta_Z}$$

即影响系数方程为

$$\bar{Z}(x) = \left(-\frac{1}{\delta_Z}\right)\delta_P(x)$$

Z的影响线与荷载作用点的竖向位移图成正比。即根据位移图可绘出影响线轮廓。



F_{RB} 影响线

机动法作静定内力或支座反力的影响线的步骤如下：

- 撤去与所求影响线的反力或内力所对应的约束，代之以相应的反力或内力，使原结构成为一个自由度的机构。
- 使所得的机构沿该反力或内力的正方向发生单位虚位移。
- 由此而得到的刚体虚位移图就是所要求的影响线。并可进一步定出影响线各竖距的数值。横坐标以上的图形，影响系数取正号；横坐标以下的图形，影响系数取负号。

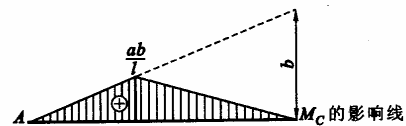
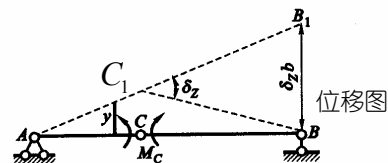
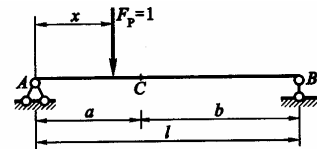
【例5.5】 用机动法作图示简支梁的 M_C 和 F_{QC} 影响线。

解： (1) M_C 影响线

撤去与弯矩 M_C 相应的约束（即在截面C处改为铰结），代之以一对等值反向的力偶 M_C 。并给体系以虚 δ_z 移

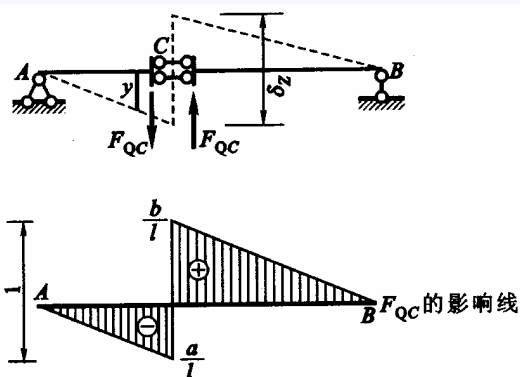
$$BB_1 = \delta_z b \quad CC_1 = \frac{ab}{l} \delta_z$$

这样得到的位移图即代表的影响线的轮廓。为了求得影响系数的数值，再将位移图除以 δ_z ，即得到 M_C 影响线。

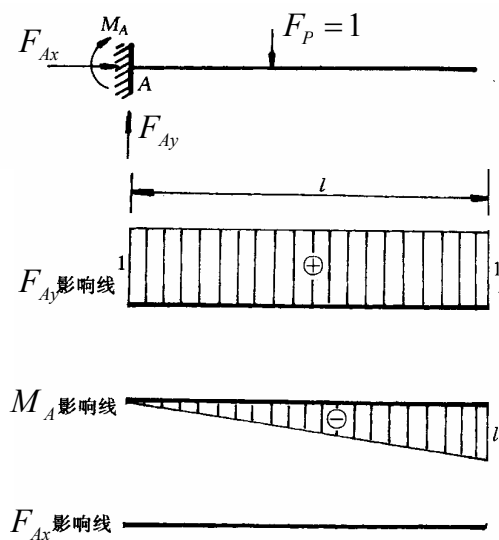


(2) F_{QC} 影响线

撤去截面C处相应于剪力的约束，代以剪力 F_{QC} ，可得图示机构。此时，在截面C处能发生相对的竖向位移，但不能发生相对的转动和水平移动。因此，切口两边的梁在发生位移后保持平行，切口的相对竖向位移即为 δ_z 。令 $\delta_z = 1$ ，由三角形几何关系即可确定影响线的各控制点数值。



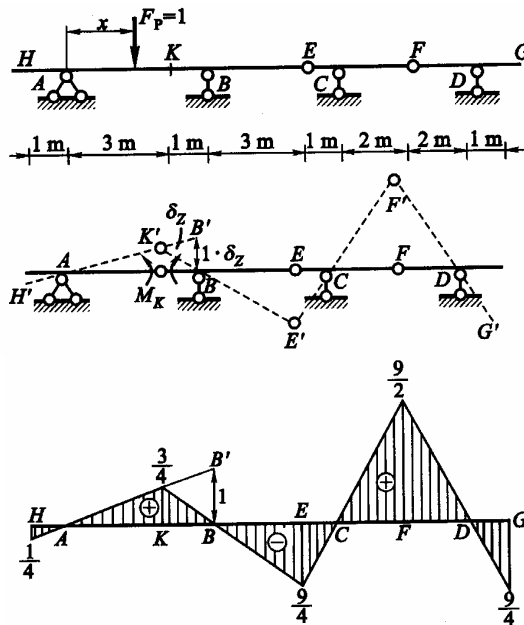
【例5.6】用机动法作图示悬臂梁的支座反力影响线。



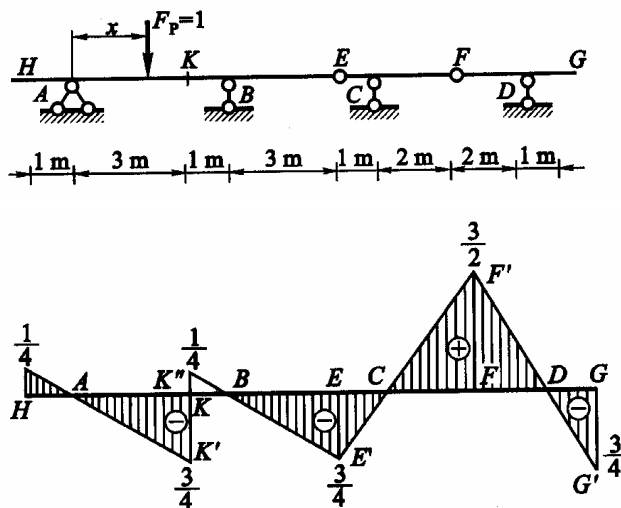
【例5.7】作静定多跨梁的 M_K 、 F_{QK} 、 M_C 、 F_{QE} 和 F_{RD} 影响线。

解：

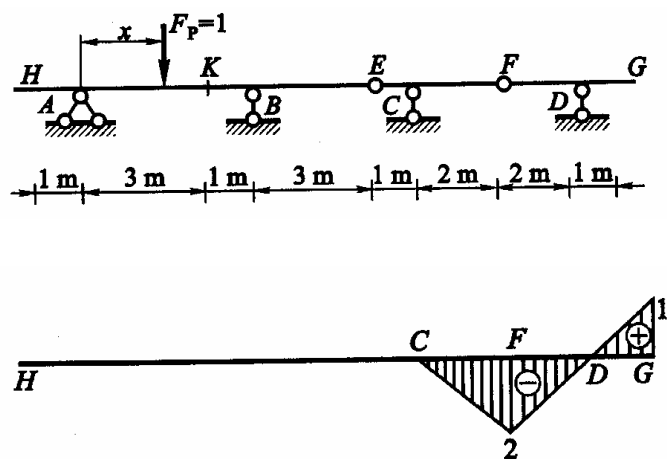
(1) M_K 影响线



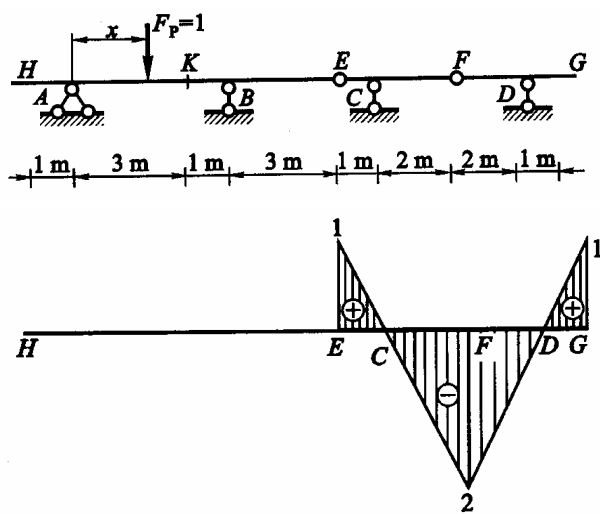
(2) F_{QK} 影响线



(3) M_C 影响线



(4) F_{QE} 影响线



(5) F_{RD} 影响线

